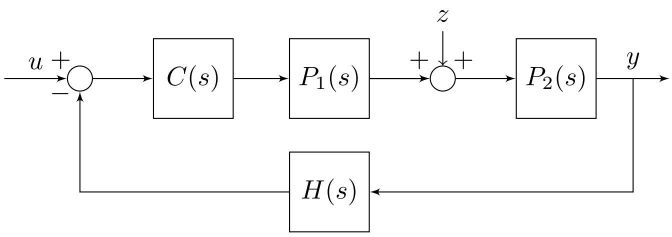
Esame di Fondamenti di Automatica
Ingegneria Elettronica
Day Month Year
Compito A

A

Cognome:	**Nome**:	**Matricola**:	**Mail**:

1. Dato il sistema di controllo raffigurato, con

$$C(s) = \frac{K_c}{s}; P_1(s) = \frac{1}{(s+4)};$$
$$P_2(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)}; H(s) = 1$$



determinare

(a) Per quali valori di K_c il sistema risulta stabile a ciclo chiuso

(b) Il tipo di sistema di controllo

(c) L'astatismo rispetto al disturbo z costante

(d) L'uscita permanente $y(\infty)$ con $u(t) = 10\,t\,\delta_{-1}(t)$ e con $z(t) = 0$

(e) L'uscita permanente $y(\infty)$ con $u(t) = 0$ e con $z(t) = 5\,t\,\delta_{-1}(t)$

Soluzione esercizio 1

(a) Per determinare la stabilità del sistema a ciclo chiuso $W(s)$ in funzione del valore del guadagno K_c, si deve prima calcolare la funzione a ciclo chiuso $W(s)$ del sistema come segue

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)} \\ &= \frac{\frac{K_c}{s}\frac{1}{(s+4)}\frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s}\frac{1}{(s+4)}\frac{(s+2)}{(s+3)}} \\ &= \frac{K_c\,(s+2)}{s\,(s+4)\,(s+3) + K_c\,(s+2)} \\ &= \frac{K_c\,(s+2)}{s^3 + 7\,s^2 + (K_c+12)\,s + 2\,K_c} \end{aligned}$$

Si deve poi costruire la tabella di Routh dell'equazione caratteristica $Q(S) = s^3 + 7\,s^2 + (K_c + 12)\,s + 2\,K_c$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K_c + 12 \\ 2 & 7 & 2\,K_c \\ 1 & \frac{5\,K_c}{7} + 12 & \\ 0 & 2\,K_c & \end{array}$$

Da cui si può ricavare

$$\begin{cases} \frac{5\,K_c}{7} + 12 > 0 \\ 2\,K_c > 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce che la condizione cercata risulta essere $\mathbf{K_c > 0}$.

(b) Il sistema di controllo è di tipo 1 essendoci un integratore in catena diretta.

(c) Il sistema ha un polo nell'origine a monte del disturbo z e quindi il disturbo costante viene rigettato. Se ne deduce che il sistema è astatico rispetto al disturbo costante z

(d) Il sistema è di tipo $h = 1$ e l'ingresso è di ordine $i = 1$ (rampa di ampiezza $U = 10$). Se ne deduce che l'uscita a regime permanente presenta un errore non nullo. In particolare, l'uscita permanente è data da due componenti:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty}(y_d(t) - e(t)) = \lim_{t\to\infty} y_d(t) - \lim_{t\to\infty} e(t)$$

i) il primo termine $y_d(\infty)$ indica l'uscita permanente desiderata, che in questo caso è pari a

$$y_d(\infty) = \lim_{t\to\infty} K_d\, u(t) = \lim_{t\to\infty} 10\, t\, \delta_{-1}(t)$$

ii) il secondo termine $e(\infty)$ indica dall'errore a regime permanente, che in questo caso è pari a

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sW_e(s)\frac{i!}{s^{i+1}}|U| = \lim_{s\to 0} W_e(s)\frac{i!}{s^i}|U| = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2\, s^{h-i}}{K_d\, s^h + K_G} i!\, |U|$$

dove $h = 1$, $i = 1$, $K_d = 1$, $K_G = K_C/6$, e $|U| = 10$. Da cui si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2}{K_d\, s + K_G}\, i!\, |U| = \frac{K_d^2}{K_G}\, i!\, |U| = \frac{60}{K_c}$$

Si noti che nello svolgere l'esercizio si è tenuto conto della seguente relazione $\mathcal{L}\left\{|U|\, t^i\right\} = |U|\, \frac{i!}{s^{i+1}}$.

Si noti che alternativamente si sarebbe potuto pensare di applicare il teorema del valor finale per calcolare l'uscita $y(\infty)$ come segue:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\, Y(s) = \lim_{s\to 0} s\, W(s)\, U(s)$$

Si noti tuttavia che l'applicazione del teorema del valor finale richiede che la funzione $sY(s)$ sia analitica, e l'analicità della funzione $sY(s)$ impone che questa funzione **non** abbia poli con parte reale positiva o nulla.

Si proceda quindi al calcolo di $sY(s)$ per verificarne l'analicità come segue:

$$\begin{aligned}
sY(s) &= s\, W(s)\, U(s) \\
&= s\, \frac{C(s)\, P_1(s)\, P_2(s)}{1 + C(s)\, P_1(s)\, P_2(s)\, H(s)}\, U(s) \\
&= s\, \frac{\frac{K_c}{s}\, \frac{1}{(s+4)}\, \frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s}\, \frac{1}{(s+4)}\, \frac{(s+2)}{(s+3)}}\, \frac{10}{s^2} \\
&= s\, \frac{K_c\, (s+2)}{s\, (s+4)\, (s+3) + K_c\, (s+2)}\, \frac{10}{s^2} \\
&= \frac{K_c\, (s+2)}{s\, (s+4)\, (s+3) + K_c\, (s+2)}\, \frac{10}{s} \\
&= \frac{10\, K_c\, (s+2)}{s\, \big(s\, (s+4)\, (s+3) + K_c\, (s+2)\big)}
\end{aligned}$$

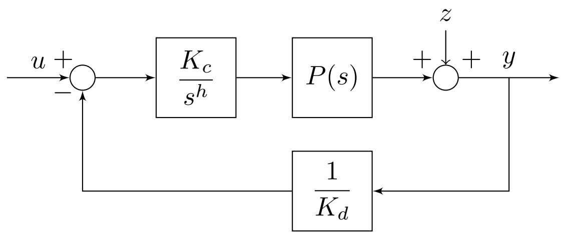
Si noti come tale funzione $s\, Y(s)$ non rispecchi il vincolo di analicità. Pertanto in questo specifico caso, non si può applicare il teorema del valor finale per il calcolo dell' uscita a regime permanente $y(\infty)$.

(e) Per un ingresso nullo e disturbo a rampa di valore pari a $z(t) = Z\, t\delta_{-1}(t)$, con $Z = 5$, l'uscita del sistema è pari a

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \lim_{s\to 0} s\, W_z(s)\, Z(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\, \frac{P_2(s)}{1 + C(s)\, P_1(s)\, P_2(s)\, H(s)}\, \frac{Z}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} s\, \frac{P_2(s)}{1 + C(s)\, P_1(s)\, P_2(s)\, H(s)}\, \frac{5}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} s\, \frac{\frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s}\, \frac{1}{(s+4)}\, \frac{(s+2)}{(s+3)}}\, \frac{5}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} s\, \frac{(s+2)\, s\, (s+4)}{s\, (s+4)\, (s+3) + K_c(s+2)}\, \frac{5}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(s+2)\, (s+4)}{s\, (s+4)\, (s+3) + K_c(s+2)} 5 \\
&= \frac{4}{K_c} 5
\end{aligned}$$

2. Sia dato un processo $P(s)$ descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{40}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)}$$



(a) Sintetizzare il sistema di controllo in figura con $K_d = 3$ determinando
   - Il valore di h
   - Il valore di K_c

   in modo tale che l'errore a regime per ingresso a rampa $u(t) = 4\,t\,\delta_{-1}(t)$ sia uguale a 1/3.

(b) Calcolare la funzione a ciclo aperto $F(s)$ e tracciare i diagrammi di
   - Bode
   - Nyquist

(c) Determinare su tali diagrammi
   - la pulsazione di attraversamento ω_t
   - margini di stabilità (m_φ e m_G)

Soluzione esercizio 2

(a) Il valore h (che caratterizza il tipo del sistema) viene determinato a partire dalle informazioni fornite sull'errore a regime. In particolare, per avere un errore finito a fronte di un ingresso a rampa, il sistema deve essere di tipo 1, da cui si deduce che nel caso in esame $h = 1$.

Il valore di K_c viene determinato a partire dalla formula dell'errore a regime, ovvero

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sW_e(s)\frac{i!}{s^{i+1}}|U| = \lim_{s\to 0} W_e(s)\frac{i!}{s^i}|U| = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2\, s^{h-i}}{K_d\, s^h + K_G} i!\,|U|$$

dove ponendo $h = 1$, $i = 1$, $K_d = 3$, $K_G = 2\,K_C$, e $|U| = 4$, si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2}{K_d\, s + K_G}\, i!\,|U| = \frac{K_d^2}{K_G}\, i!\,|U| = \frac{3^2}{2\,K_c}4 = \frac{18}{K_c}$$

da cui ricordando che $e(\infty) = 1/3$ si ottiene:

$$K_c = 54$$

Si noti che nello svolgere l'esercizio si è tenuto conto della seguente relazione $\mathcal{L}\left\{|U|\,t^i\right\} = |U|\,\frac{i!}{s^{i+1}}$.

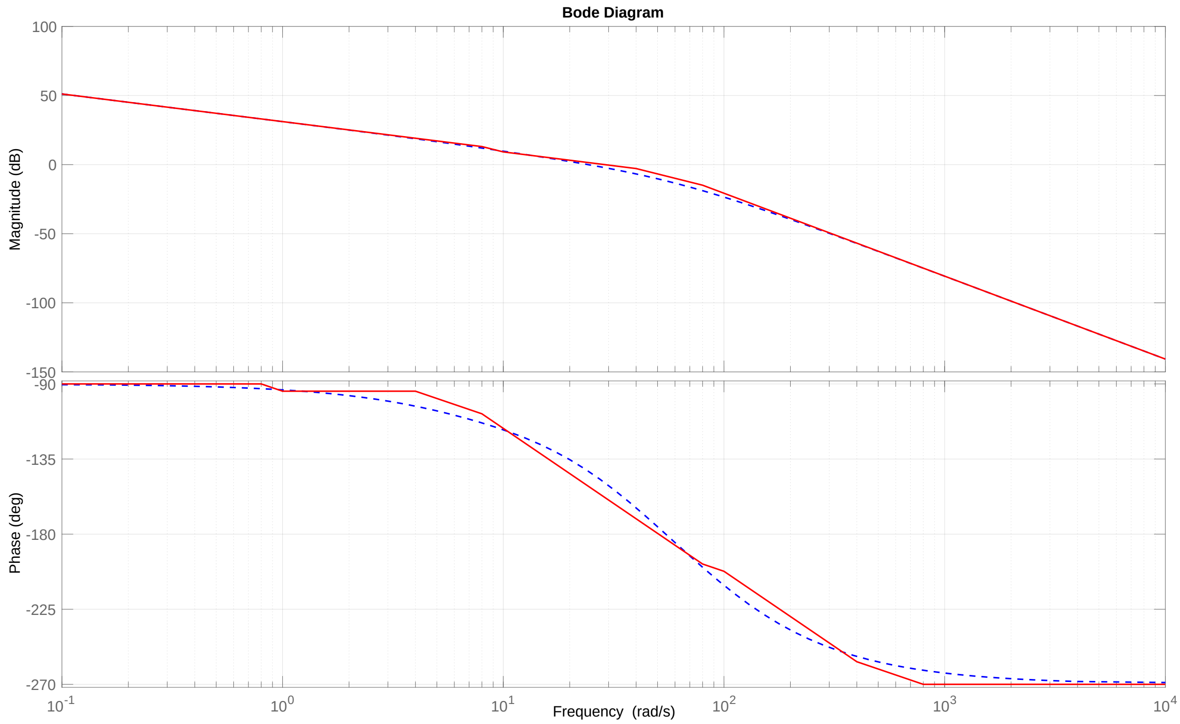
Quindi si è scelto $K_c = 54$ e $h = 1$, da cui deriva il controllore

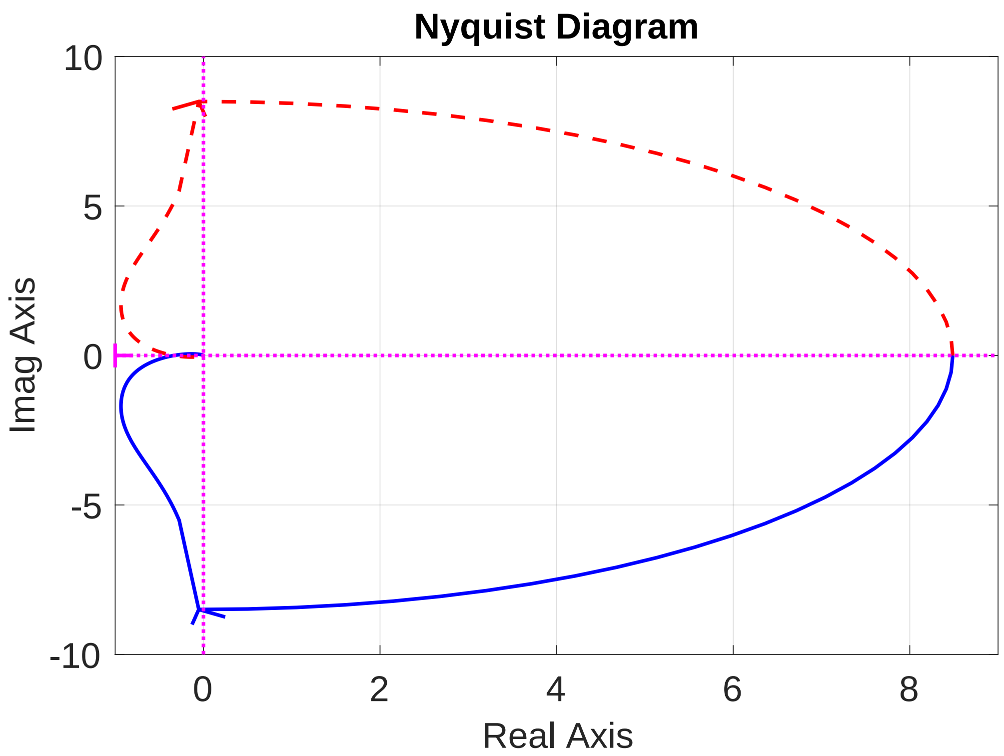
$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} = \frac{54}{s}.$$

(b) La funzione di trasferimento a ciclo aperto risulta essere:

$$\begin{aligned} F(s) = H(s)C(s)P(s) &= \frac{1}{3}\frac{54}{s}\frac{2\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{40}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)} \\ &= \frac{36\left(\frac{s}{10}+1\right)}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{40}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)} \end{aligned}$$

a cui sono associati i seguenti diagrammi di Bode e Nyquist





(c) Relativamente alla pulsazione di attraversamento ed ai margini di stabilità si ha:

- pulsazione di attraversamento $\omega_t \sim 30$ rad/sec.
- Margine di fase $m_\varphi \sim 30°$ e margine di guadagno è $m_g \simeq 6.7$ dB

Si noti che il testo d'esame richiede che tali valori vengano determinati **direttamente** sui diagrammi. Ovvero che vengano "segnati" su entrambi i diagrammi.

3. Dato un processo $P(s)$ descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s+2)\,(s+3)}{(s^2+2\,s+10)\,(s+4)}$$

determinare

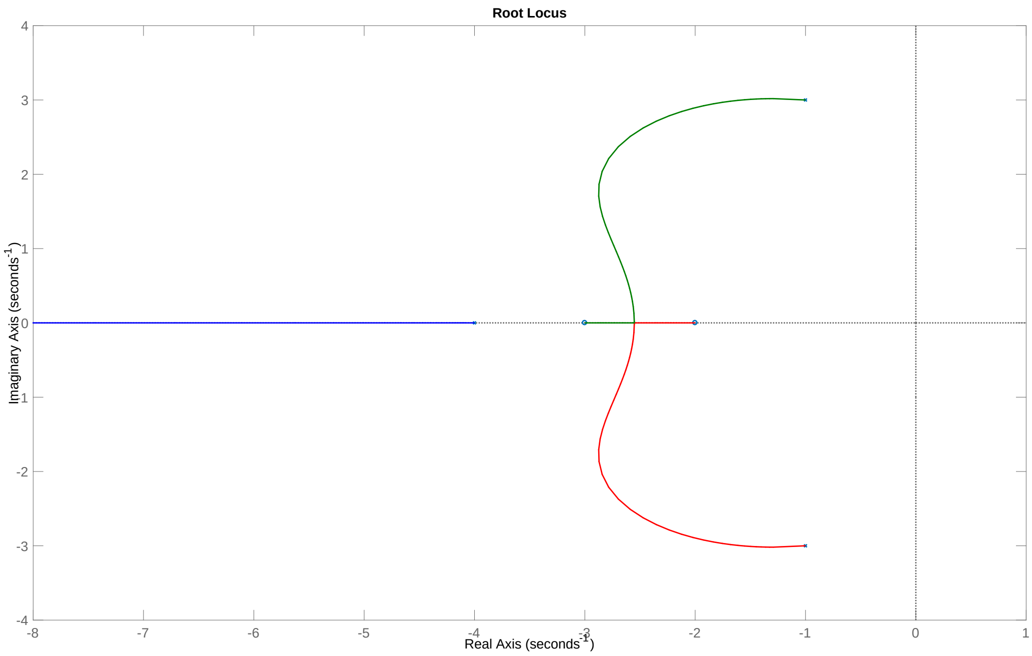
(a) Il luogo delle radici completo

(b) Stabilità al variare del guadagno K.

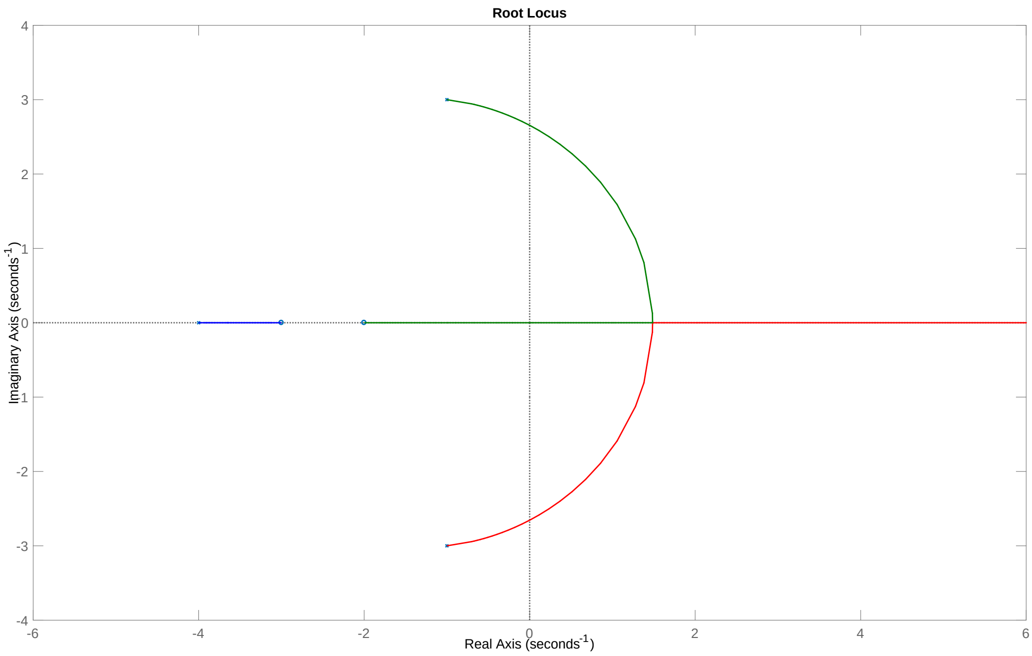
Soluzione esercizio 3

(a) Relativamente al tracciamento del luogo delle radici si ha:

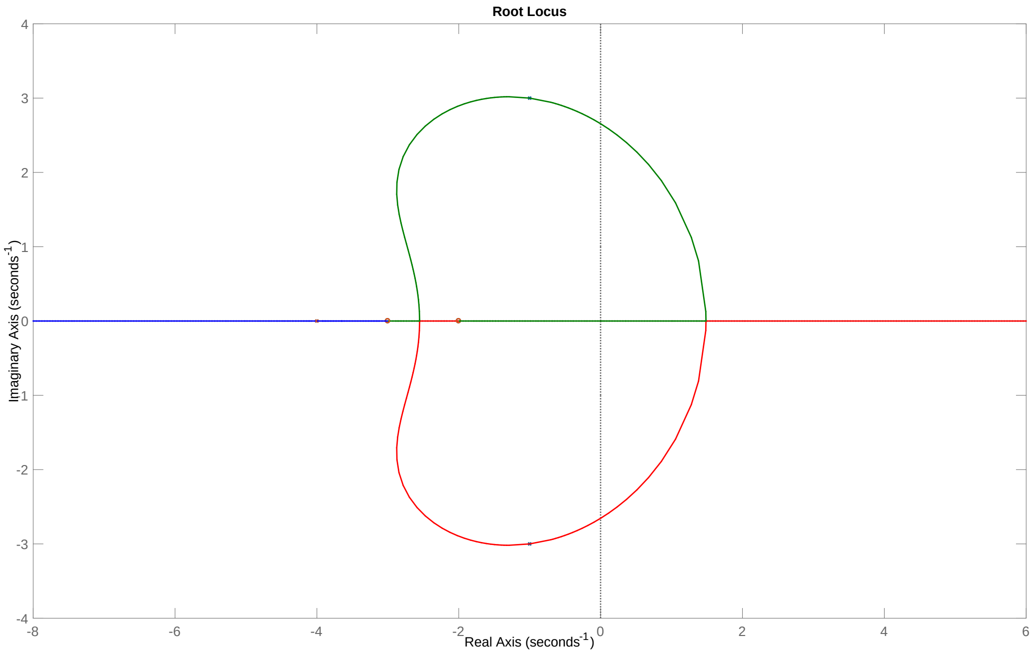
- Il luogo delle radici per $K > 0$ risulta essere



- Il luogo delle radici per $K < 0$ risulta essere



- Il luogo delle radici completo risulta essere



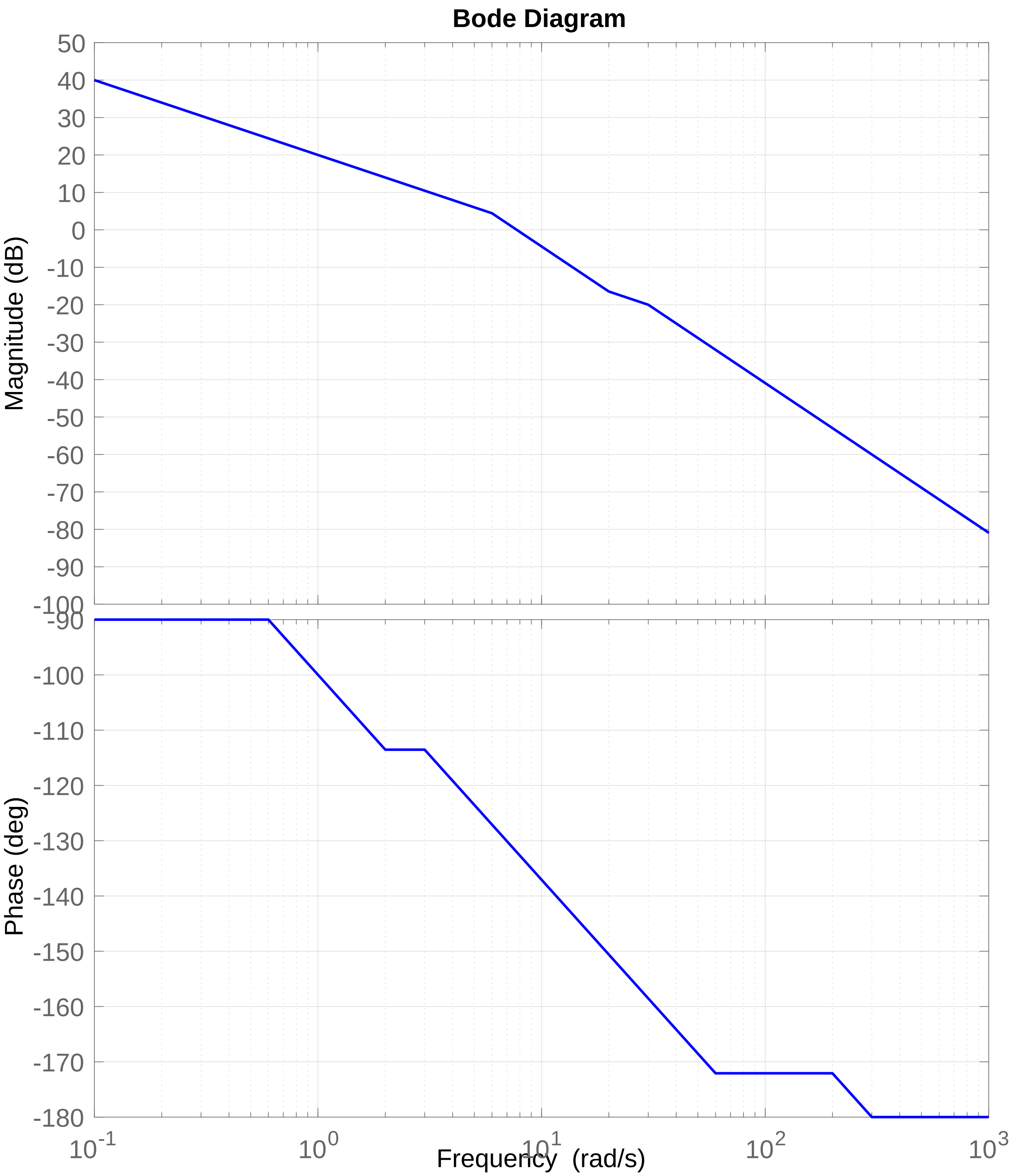
Si ricorda che da un punto di vista operativo, per il tracciamento del luogo delle radici dato un processo descritto dalla $P(s) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$ si opera come segue:

- Calcolare l'eccesso poli zero $(n - m)$ ed il numero massimo ammissibile di punti di singolarità $(n + m - 1)$.
- Tracciare i poli $\{p_1, \cdots, p_n\}$ e zeri $\{z_1, \cdots, z_m\}$ sul piano complesso. Individuare i tratti dell'asse reale che appartengono al luogo (per $K > 0$ e/o $K < 0$).
- Identificare il centrostella S_0 e tracciare gli asintoti.
- Identificare i punti di singolarità
- Effettuare l'analisi per $\mid K \mid \to \infty$
- Orientare il luogo

(b) Relativamente alla stabilità al variare del guadagno K, dal tracciamento del luogo delle radici si deduce che il sistema risulterà sempre stabile per ogni $K > 0$, mentre per $K < 0$ esisterà un opportuno $K_1 < 0$ tale che il sistema risulterá instabile per ogni $K < K_1$. Si noti che nel caso si volesse calcolare esattamente numericamente il valore di K_1, si può ricorrere al criterio di Routh.

---

4. Dato il diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto $F(s)$ sotto riportata (non ci sono poli a parte reale positiva) determinare la rete compensatrice $R(s)$ tale da assicurare $\omega_t \leq\ 30 rad/sec, m_\varphi \leq 55°$. Tracciare il diagramma di Nichols della funzione compensata $F'(s) = F(s)R(s)$ e determinare su di esso il modulo alla risonanza M_r e la banda passante a -3 dB ω_{-3}.



Soluzione esercizio 4

L'esercizio chiede che la $F'(s) = R(s)\,F(s)$ soddisfi le seguenti specifiche:

- $\omega_t \leq 30$ rad/sec
- $m_\phi \leq 55°$

Dal diagramma di Bode (asintotico) della funzione $F(s)$ si può notare che per $\bar{\omega} = 30$ rad/sec si ha:

- $|F(\bar{\omega})| \sim -20$ dB
- $\angle F(\bar{\omega}) \sim -158.5°$

Se ne deduce che l'azione della rete correttrice dovrà essere tale da:

- **Incrementare** il modulo di ~ 20 dB
- **Incrementare** la fase di $\sim 33.5°$

$\Rightarrow$ Si necessita di una **Rete Anticipatrice**

La rete anticipatrice desiderata puó essere espressa in forma parametrica come:

$$R(s) = \frac{1 + s\,\tau}{1 + s\,\tau \dfrac{1}{m}} = \frac{1 + s\,\dfrac{u}{\omega^\star}}{1 + s\,\dfrac{u}{\omega^\star}\,\dfrac{1}{m}}$$

con la seguente scelta dei parametri:

- $m = 10$
- $u = 20$
- $\omega^\star = 30$

ottenuta consultando la tabella che riporta il diagramma di Bode (asintotico) di varie reti anticipatrici ottenute al variare del parametro m. (Tabella disponibile al seguente link).

Dal diagramma di Bode (asintotico) della rete correttrice $R(S)$ ottenuta con tale scelta dei parametri $\{m,\, u,\, \omega^\star\}$ si può notare che per $\bar{\omega} = 30$ rad/sec si ha:

- $|R(\bar{\omega})| \sim 20$ dB
- $\angle R(\bar{\omega}) \sim 31.5°$

Si consideri la funzione compensata $F'(s) = R(s)\,F(s)$ e si noti che per $\bar{\omega} = 30$ rad/sec si ha:

- $|F'(\bar{\omega})| \sim 0$ dB
- $\angle F'(\bar{\omega}) \sim -127°$

che riflette le specifiche desiderate.

Relativamente al diagramma di Nichols si può notare che la banda passante ω_{-3} è tale per cui:

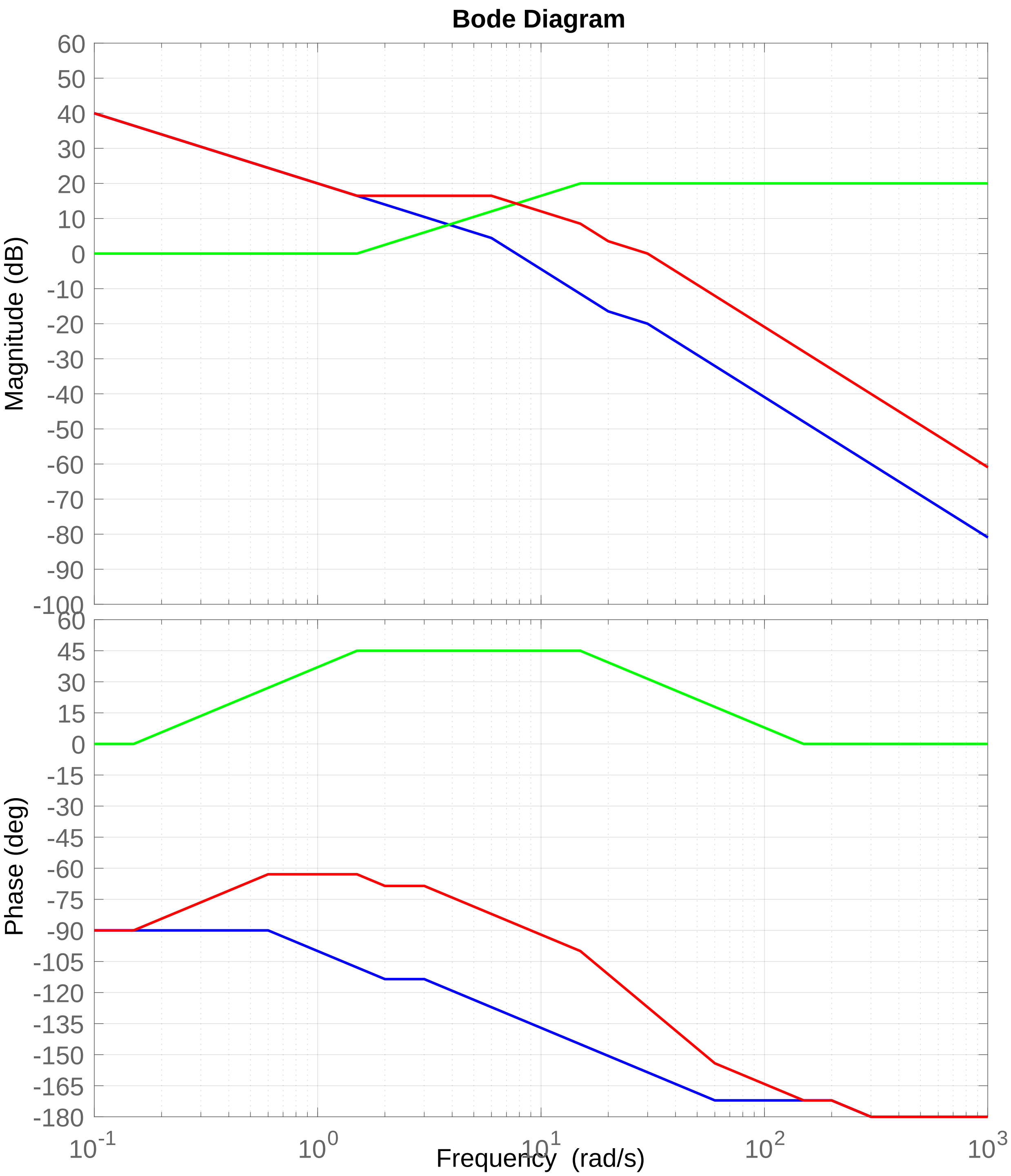
- $|F'(\omega_{-3})| \sim -6.2$ dB
- $\angle F'(\omega_{-3}) \sim -142°$

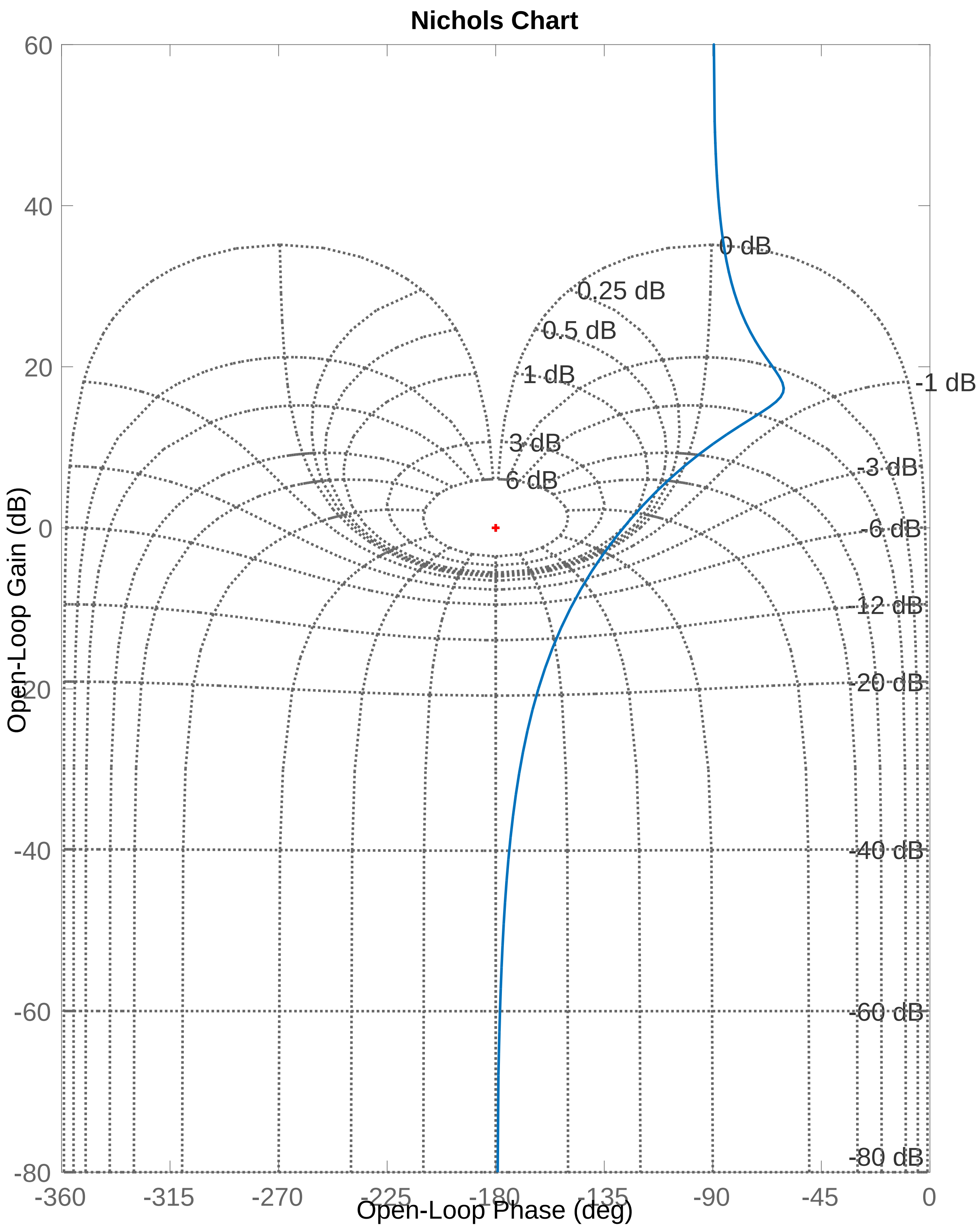
a questo punto verificando tali valori sul diagramma di Bode (asintotico) della funzione compensata $F'(s)$ si ottiene:

- $\omega_{-3} \sim 42$ rad/sec

Sempre sul diagramma di Nichols si può notare che il valore della curva a modulo costante di valore più elevato che risulti tangente alla curva della $F'(s)$ risulta essere la curva a modulo pari ad 1 dB, da cui si deduce che

- $M_r \sim 1$ dB


Bode Diagram
Magnitude (dB)
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
Phase (deg)
60
45
30
15
0
-15
-30
-45
-60
-75
-90
-105
-120
-135
-150
-165
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)


Nichols Chart
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-360
-315
-270
-225
-180
-135
-90
-45
0
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB
-60 dB
-80 dB