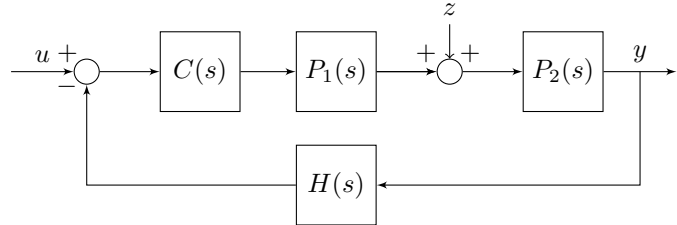


Cognome:	Nome:	Matricola:	Mail:
----------	-------	------------	-------

1. Dato il sistema di controllo raffigurato, con

$$C(s) = \frac{K_c}{s}; P_1(s) = \frac{1}{(s+4)};$$

$$P_2(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)}; H(s) = 1$$



determinare

- Per quali valori di  $K_c$  il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
- Il tipo di sistema di controllo
- L'astatismo rispetto al disturbo  $z$  costante
- L'uscita permanente  $y(\infty)$  con  $u(t) = 10t \delta_{-1}(t)$  e con  $z(t) = 0$
- L'uscita permanente  $y(\infty)$  con  $u(t) = 0$  e con  $z(t) = 5t \delta_{-1}(t)$

### Soluzione esercizio 1

- Per determinare la stabilità del sistema a ciclo chiuso  $W(s)$  in funzione del valore del guadagno  $K_c$ , si deve prima calcolare la funzione a ciclo chiuso  $W(s)$  del sistema come segue

$$W(s) = \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

$$= \frac{\frac{K_c}{s} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+2)}{(s+3)}}$$

$$= \frac{K_c (s+2)}{s(s+4)(s+3) + K_c (s+2)}$$

$$= \frac{K_c (s+2)}{s^3 + 7s^2 + (K_c + 12)s + 2K_c}$$

Si deve poi costruire la tabella di Routh dell'equazione caratteristica  $Q(s) = s^3 + 7s^2 + (K_c + 12)s + 2K_c$

3	1	$K_c + 12$
2	7	$2K_c$
1	$\frac{5K_c}{7} + 12$	
0	$2K_c$	

Da cui si può ricavare

$$\begin{cases} \frac{5K_c}{7} + 12 > 0 \\ 2K_c > 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce che la condizione cercata risulta essere  $K_c > 0$ .

- Il sistema di controllo è di tipo 1 essendoci un integratore in catena diretta.
- Il sistema ha un polo nell'origine a monte del disturbo  $z$  e quindi il disturbo costante viene rigettato. Se ne deduce che il sistema è astatico rispetto al disturbo costante  $z$
- Il sistema è di tipo  $h = 1$  e l'ingresso è di ordine  $i = 1$  (rampa di ampiezza  $U = 10$ ). Se ne deduce che l'uscita a regime permanente presenta un errore non nullo. In particolare, l'uscita permanente è data da due componenti:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_d(t) - e(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

i) il primo termine  $y_d(\infty)$  indica l'uscita permanente desiderata, che in questo caso è pari a

$$y_d(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_d u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10 t \delta_{-1}(t)$$

ii) il secondo termine  $e(\infty)$  indica dall'errore a regime permanente, che in questo caso è pari a

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \frac{|U|}{s^{i+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) \frac{|U|}{s^i} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2 s^{h-i}}{K_d s^h + K_G} |U|$$

dove  $h = 1$ ,  $i = 1$ ,  $K_d = 1$ ,  $K_G = K_C/6$ , e  $|U| = 10$ . Da cui si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{K_d s + K_G} |U| = \frac{K_d^2}{K_G} |U| = \frac{60}{K_C}$$

Si noti che alternativamente si sarebbe potuto pensare di applicare il teorema del valor finale per calcolare l'uscita  $y(\infty)$  come segue:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) U(s)$$

Si noti tuttavia che l'applicazione del teorema del valor finale richiede che la funzione  $sY(s)$  sia analitica, e l'analicità della funzione  $sY(s)$  impone che questa funzione **non** abbia poli con parte reale positiva o nulla.

Si proceda quindi al calcolo di  $sY(s)$  per verificarne l'analicità come segue:

$$\begin{aligned} sY(s) &= s W(s) U(s) \\ &= s \frac{C(s) P_1(s) P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} U(s) \\ &= s \frac{\frac{K_c}{s} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+2)}{(s+3)}} \frac{10}{s^2} \\ &= s \frac{K_c (s+2)}{s (s+4) (s+3) + K_c (s+2)} \frac{10}{s^2} \\ &= \frac{K_c (s+2)}{s (s+4) (s+3) + K_c (s+2)} \frac{10}{s} \\ &= \frac{10 K_c (s+2)}{s (s (s+4) (s+3) + K_c (s+2))} \end{aligned}$$

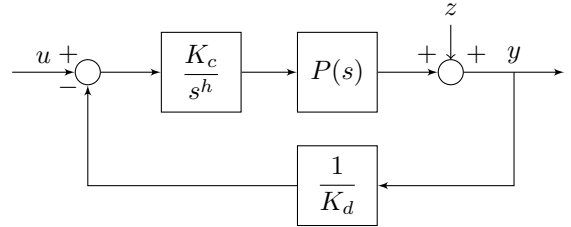
Si noti come tale funzione  $sY(s)$  non rispetchi il vincolo di analicità. Pertanto in questo specifico caso, non si può applicare il teorema del valor finale per il calcolo dell'uscita a regime permanente  $y(\infty)$ .

(e) Per un ingresso nullo e disturbo a rampa di valore pari a  $z(t) = Z t \delta_{-1}(t)$ , con  $Z = 5$ , l'uscita del sistema è pari a

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_z(s) Z(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} \frac{Z}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} \frac{5}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{(s+2)}{(s+3)}}{1 + \frac{K_c}{s} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+2)}{(s+3)}} \frac{5}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+2) s (s+4)}{s (s+4) (s+3) + K_c (s+2)} \frac{5}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+2) (s+4)}{s (s+4) (s+3) + K_c (s+2)} 5 \\ &= \frac{4}{K_c} 5 \end{aligned}$$

2. Sia dato un processo  $P(s)$  descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{2 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{8} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)}$$



(a) Sintetizzare il sistema di controllo in figura con  $K_d = 3$  determinando

- Il valore di  $h$
- Il valore di  $K_c$

in modo tale che l'errore a regime per ingresso a rampa  $u(t) = 4t \delta_{-1}(t)$  sia uguale a  $1/3$ .

(b) Calcolare la funzione a ciclo aperto  $F(s)$  e tracciare i diagrammi di

- Bode
- Nyquist

(c) Determinare su tali diagrammi

- la pulsazione di attraversamento  $\omega_t$
- margini di stabilità ( $m_\varphi$  e  $m_G$ )

### Soluzione esercizio 2

(a) Il valore  $h$  (che caratterizza il tipo del sistema) viene determinato a partire dalle informazioni fornite sull'errore a regime. In particolare, per avere un errore finito a fronte di un ingresso a rampa, il sistema deve essere di tipo 1, da cui si deduce che nel caso in esame  $h = 1$ .

Il valore di  $K_c$  viene determinato a partire dalla formula dell'errore a regime, ovvero

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \frac{|U|}{s^{i+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) \frac{|U|}{s^i} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2 s^{h-i}}{K_d s^h + K_G} |U|$$

dove ponendo  $h = 1$ ,  $i = 1$ ,  $K_d = 3$ ,  $K_G = 2 K_C$ , e  $|U| = 4$ , si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{K_d s + K_G} |U| = \frac{K_d^2}{K_G} |U| = \frac{3^2}{2 K_c} 4 = \frac{18}{K_c}$$

da cui ricordando che  $e(\infty) = 1/3$  si ottiene:

$$K_c = 54$$

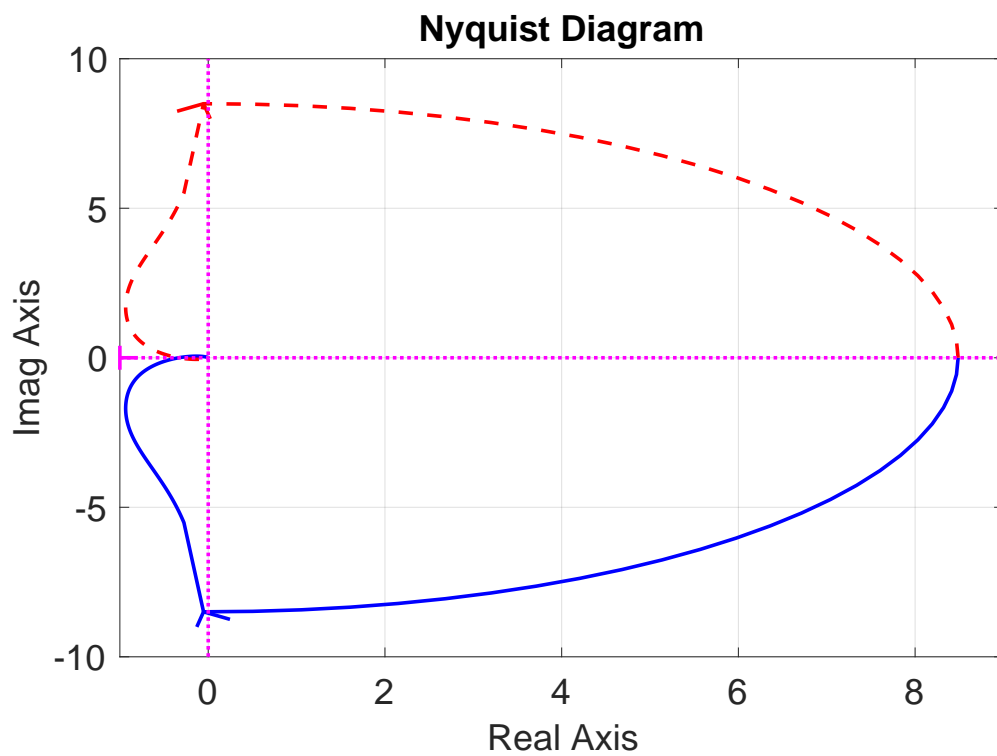
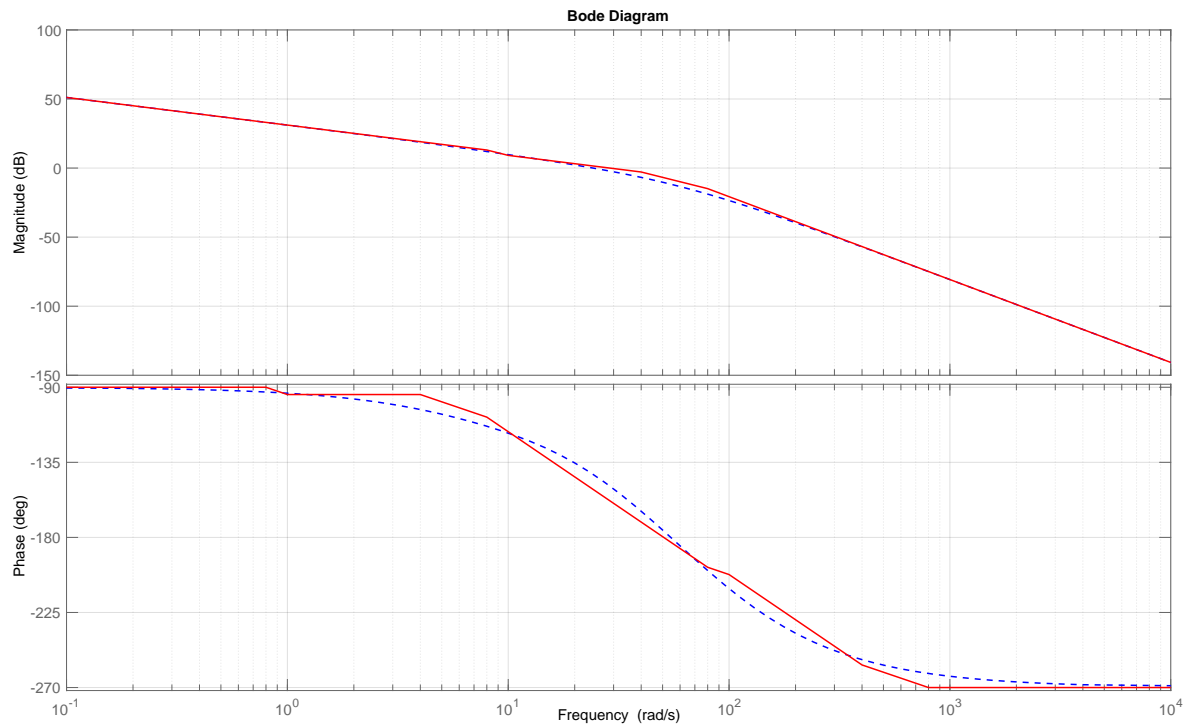
Quindi si è scelto  $K_c = 54$  e  $h = 1$ , da cui deriva il controllore

$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} = \frac{54}{s}$$

(b) La funzione di trasferimento a ciclo aperto risulta essere:

$$\begin{aligned} F(s) = H(s)C(s)P(s) &= \frac{1}{3} \frac{54}{s} \frac{2 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{8} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)} \\ &= \frac{36 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{8} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)} \end{aligned}$$

a cui sono associati i seguenti diagrammi di Bode e Nyquist



(c) Relativamente alla pulsazione di attraversamento ed ai margini di stabilità si ha:

- pulsazione di attraversamento  $\omega_t \sim 30$  rad/sec.
- Margine di fase  $m_\varphi \sim 30^\circ$  e margine di guadagno è  $m_g \simeq 6.7$  dB

Si noti che il testo d'esame richiede che tali valori vengano determinati **direttamente** sui diagrammi. Ovvero che vengano “segnati” su entrambi i diagrammi.

3. Dato un processo  $P(s)$  descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s + 2)(s + 3)}{(s^2 + 2s + 10)(s + 4)}$$

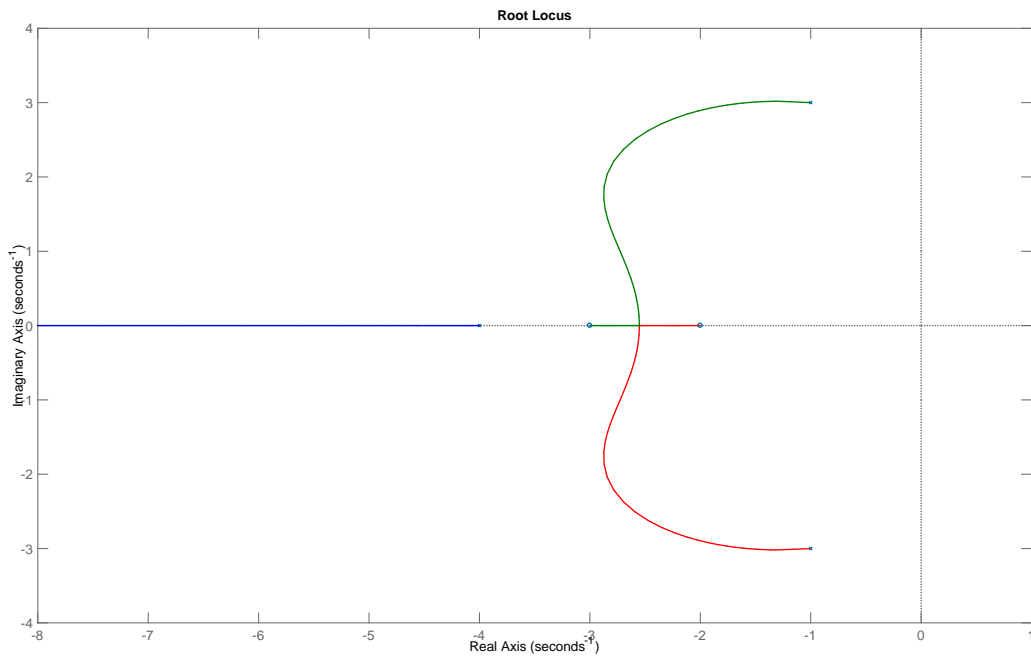
determinare

- (a) Il luogo delle radici completo
- (b) Stabilità al variare del guadagno  $K$ .

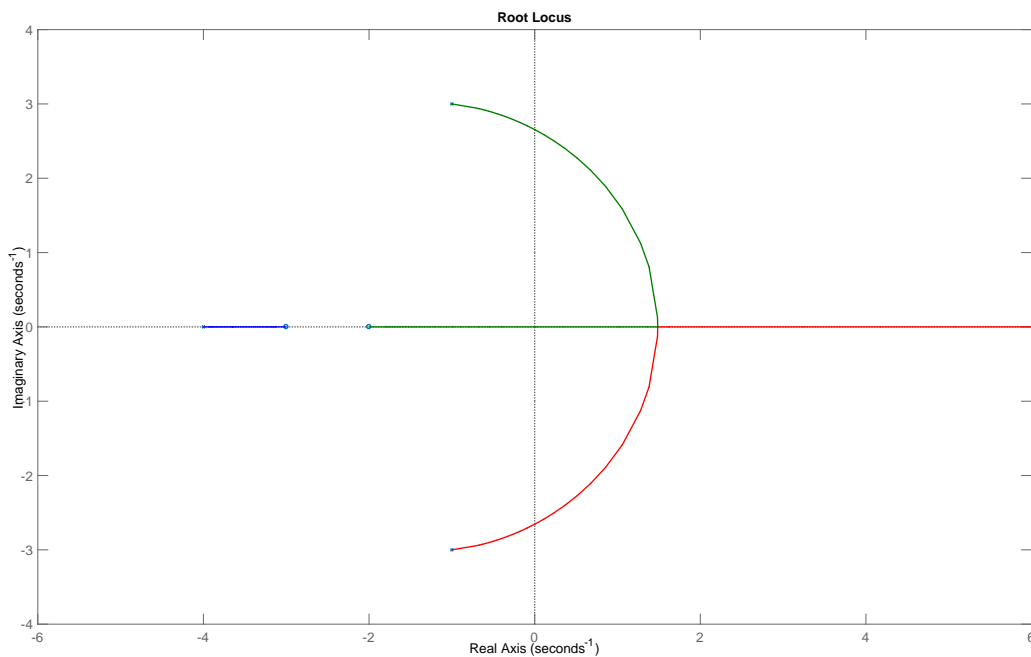
### Soluzione esercizio 3

(a) Relativamente al tracciamento del luogo delle radici si ha:

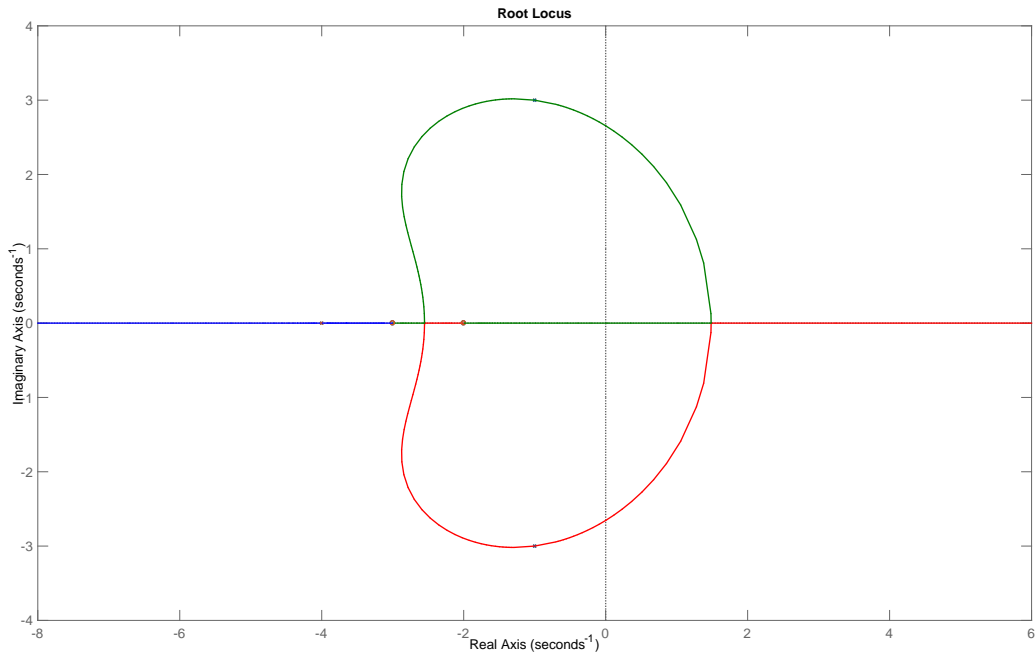
- Il luogo delle radici per  $K > 0$  risulta essere



- Il luogo delle radici per  $K < 0$  risulta essere



- Il luogo delle radici completo risulta essere

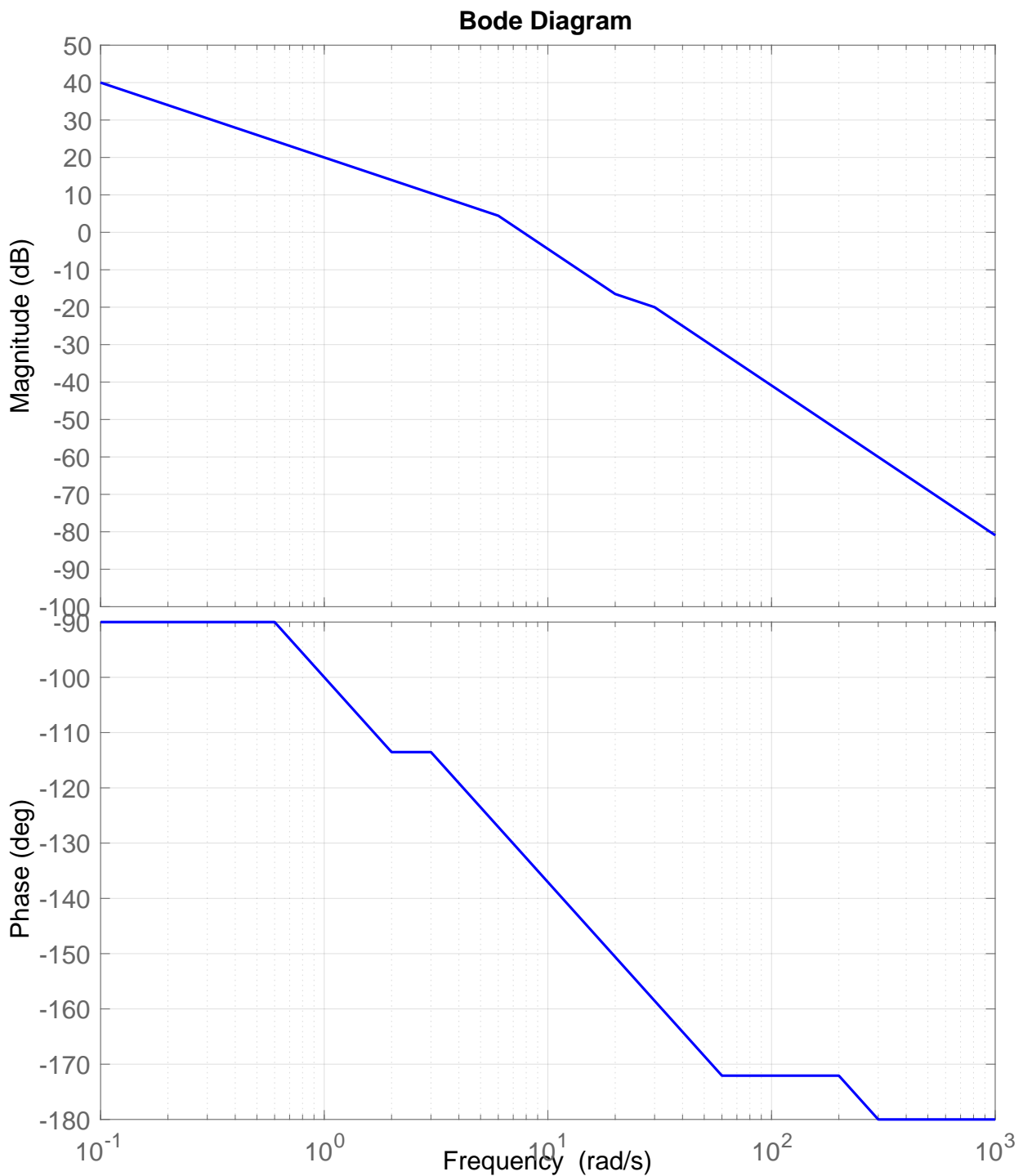


Si ricorda che da un punto di vista operativo, per il tracciamento del luogo delle radici dato un processo descritto dalla  $P(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$  si opera come segue:

- Calcolare l'eccesso poli zero ( $n - m$ ) ed il numero massimo ammissibile di punti di singolarità ( $n + m - 1$ ).
- Tracciare i poli  $\{p_1, \dots, p_n\}$  e zeri  $\{z_1, \dots, z_m\}$  sul piano complesso. Individuare i tratti dell'asse reale che appartengono al luogo (per  $K > 0$  e/o  $K < 0$ ).
- Identificare il centro stella  $S_0$  e tracciare gli asintoti.
- Identificare i punti di singolarità
- Effettuare l'analisi per  $|K| \rightarrow \infty$
- Orientare il luogo

(b) Relativamente alla stabilità al variare del guadagno  $K$ , dal tracciamento del luogo delle radici si deduce che il sistema risulterà sempre stabile per ogni  $K > 0$ , mentre per  $K < 0$  esisterà un opportuno  $K_1 < 0$  tale che il sistema risulterà instabile per ogni  $K < K_1$ . Si noti che nel caso si volesse calcolare esattamente numericamente il valore di  $K_1$ , si può ricorrere al criterio di Routh.

4. Dato il diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(s)$  sotto riportata (non ci sono poli a parte reale positiva) determinare la rete compensatrice  $R(s)$  tale da assicurare  $\omega_t \leq 30 \text{ rad/sec}$ ,  $m_\phi \leq 55^\circ$ . Tracciare il diagramma di Nichols della funzione compensata  $F'(s) = F(s)R(s)$  e determinare su di esso il modulo alla risonanza  $M_r$  e la banda passante a -3 dB  $\omega_{-3}$ .



#### Soluzione esercizio 4

L'esercizio chiede che la  $F'(s) = R(s)F(s)$  soddisfi le seguenti specifiche:

- $\omega_t \leq 30 \text{ rad/sec}$
- $m_\phi \leq 55^\circ$

Dal diagramma di Bode (asintotico) della funzione  $F(s)$  si può notare che per  $\bar{\omega} = 30 \text{ rad/sec}$  si ha:

- $|F(\bar{\omega})| \sim -20$  dB
- $\angle F(\bar{\omega}) \sim -158.5^\circ$

Se ne deduce che l'azione della rete corretttrice dovrà essere tale da:

- **Incrementare** il modulo di  $\sim 20$  dB
  - **Incrementare** la fase di  $\sim 33.5^\circ$
- ⇒ Si necessita di una **Rete Anticipatrice**

La rete anticipatrice desiderata può essere espressa in forma parametrica come:

$$R(s) = \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau \frac{1}{m}} = \frac{1 + s \frac{u}{\omega^*}}{1 + s \frac{u}{\omega^*} \frac{1}{m}}$$

con la seguente scelta dei parametri:

- $m = 10$
- $u = 20$
- $\omega^* = 30$

ottenuta consultando la tabella che riporta il diagramma di Bode (asintotico) di varie reti anticipatrici ottenute al variare del parametro  $m$ . (Tabella disponibile al seguente link).

Dal diagramma di Bode (asintotico) della rete corretttrice  $R(S)$  ottenuta con tale scelta dei parametri  $\{m, u, \omega^*\}$  si può notare che per  $\bar{\omega} = 30$  rad/sec si ha:

- $|R(\bar{\omega})| \sim 20$  dB
- $\angle R(\bar{\omega}) \sim 31.5^\circ$

Si consideri la funzione compensata  $F'(s) = R(s)F(s)$  e si noti che per  $\bar{\omega} = 30$  rad/sec si ha:

- $|F'(\bar{\omega})| \sim 0$  dB
- $\angle F'(\bar{\omega}) \sim -127^\circ$

che riflette le specifiche desiderate.

Relativamente al diagramma di Nichols si può notare che la banda passante  $\omega_{-3}$  è tale per cui:

- $|F'(\omega_{-3})| \sim -6.2$  dB
- $\angle F'(\omega_{-3}) \sim -142^\circ$

a questo punto verificando tali valori sul diagramma di Bode (asintotico) della funzione compensata  $F'(s)$  si ottiene:

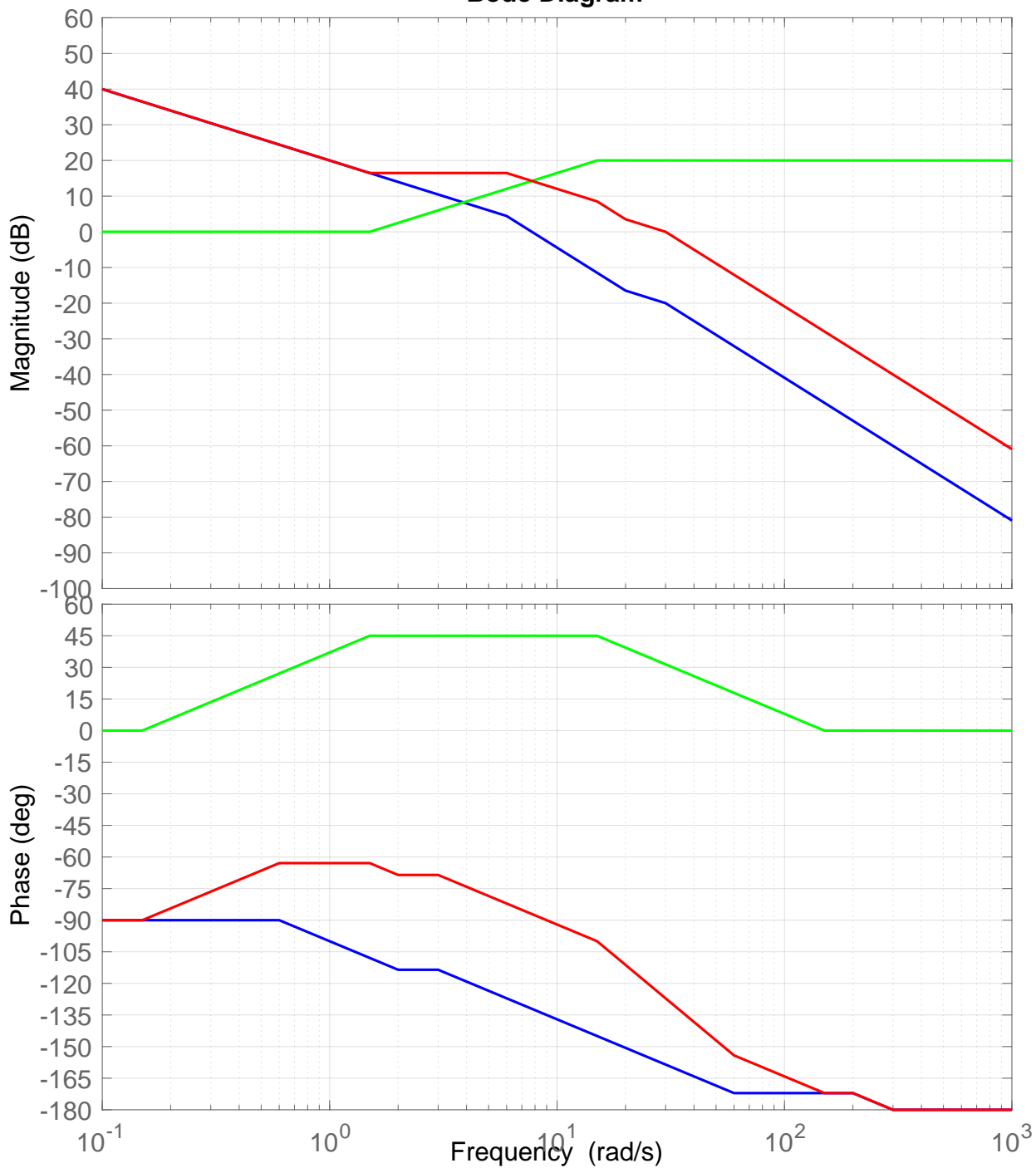
- $\omega_{-3} \sim 42$  rad/sec

Sempre sul diagramma di Nichols si può notare che il valore della curva a modulo costante di valore più elevato che risulti tangente alla curva della  $F'(s)$  risulta essere la curva a modulo pari ad 1 dB, da cui si deduce che

- $M_r \sim 1$  dB



Bode Diagram



### Nichols Chart

