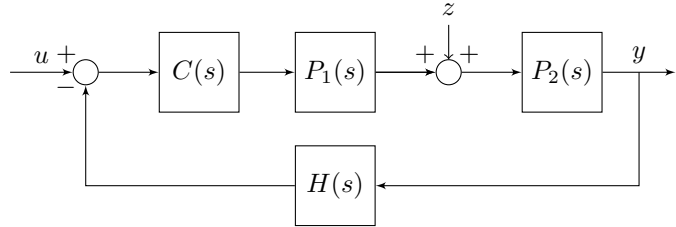


Cognome:	Nome:	Matricola:	Mail:
----------	-------	------------	-------

1. Dato il sistema di controllo raffigurato, con

$$C(s) = \frac{K_c}{s^2}; P_1(s) = \frac{1}{(s+4)};$$

$$P_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)}; H(s) = 1$$



determinare

- Per quali valori di  $K_c$  il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
- Il tipo di sistema di controllo
- L'astatismo rispetto al disturbo  $z$  costante
- L'uscita permanente  $y(\infty)$  con  $u(t) = 3t^2 \delta_{-1}(t)$  e con  $z(t) = 0$
- L'uscita permanente  $y(\infty)$  con  $u(t) = 0$  e con  $z(t) = 2t \delta_{-1}(t)$

### Soluzione esercizio 1

- Per determinare la stabilità del sistema a ciclo chiuso  $W(s)$  in funzione del valore del guadagno  $K_c$ , si deve prima calcolare la funzione a ciclo chiuso  $W(s)$  del sistema come segue

$$W(s) = \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

$$= \frac{\frac{K_c}{s^2} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+1)}{(s+2)}}{1 + \frac{K_c}{s^2} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+1)}{(s+2)}}$$

$$= \frac{K_c (s+1)}{s^2 (s+4) (s+2) + K_c (s+1)}$$

$$= \frac{K_c (s+1)}{s^4 + 6s^3 + 8s^2 + K_c s + K_c}$$

Si deve poi costruire la tabella di Routh dell'equazione caratteristica  $Q(S) = s^4 + 6s^3 + 8s^2 + K_c s + K_c$

4		1	8	$K_c$
3		6	$K_c$	
2		$8 - \frac{K_c}{6}$	$K_c$	
1		$\frac{K_c(K_c - 12)}{(K_c - 48)}$		
0		$K_c$		

Da cui si può ricavare

$$\begin{cases} 8 - \frac{K_c}{6} > 0 \\ \frac{K_c(K_c - 12)}{(K_c - 48)} > 0 \\ K_c > 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce che la condizione cercata risulta essere  $0 < K_c < 12$ .

- Il sistema di controllo è di tipo 2 essendoci due integratori in catena diretta.
- Il sistema ha due poli nell'origine a monte del disturbo  $z$  e quindi il disturbo costante viene rigettato. Se ne deduce che il sistema è astatico rispetto al disturbo costante  $z$ .

- (d) Il sistema è di tipo  $h = 2$  e l'ingresso è di ordine  $i = 2$  (rampa parabolica di ampiezza  $U = 3$ ). Se ne deduce che l'uscita a regime permanente presenta un errore non nullo. In particolare, l'uscita permanente è data da due componenti:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_d(t) - e(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

- i) il primo termine  $y_d(\infty)$  indica l'uscita permanente desiderata, che in questo caso è pari a

$$y_d(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_d u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3 t^2 \delta_{-1}(t)$$

- ii) il secondo termine  $e(\infty)$  indica dall'errore a regime permanente, che in questo caso è pari a

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \frac{i!}{s^{i+1}} |U| = \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) \frac{i!}{s^i} |U| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2 s^{h-i}}{K_d s^h + K_G} i! |U|$$

dove  $h = 2$ ,  $i = 2$ ,  $K_d = 1$ ,  $K_G = K_C/8$ , e  $|U| = 3$ . Da cui si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{K_d s + K_G} i! |U| = \frac{K_d^2}{K_G} i! |U| = \frac{48}{K_C}$$

Si noti che nello svolgere l'esercizio si è tenuto conto della seguente relazione  $\mathcal{L}\{|U| t^i\} = |U| \frac{i!}{s^{i+1}}$ .

Si noti che alternativamente si sarebbe potuto pensare di applicare il teorema del valor finale per calcolare l'uscita  $y(\infty)$  come segue:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) U(s)$$

Si noti tuttavia che l'applicazione del teorema del valor finale richiede che la funzione  $sY(s)$  sia analitica, e l'analicità della funzione  $sY(s)$  impone che questa funzione **non** abbia poli con parte reale positiva o nulla.

Si proceda quindi al calcolo di  $sY(s)$  per verificarne l'analicità come segue:

$$\begin{aligned} s Y(s) &= s \frac{C(s) P_1(s) P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} U(s) \\ &= s \frac{\frac{K_c}{s^2} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+1)}{(s+2)} \cdot 3}{1 + \frac{K_c}{s^2} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+1)}{(s+2)}} \\ &= \frac{K_c (s+1)}{s^2 (s+4) (s+2) + K_c (s+1)} \frac{3}{s^2} \\ &= \frac{3 K_c (s+1)}{s^2 (s^4 + 6 s^3 + 8 s^2 + K_c s + K_c)} \end{aligned}$$

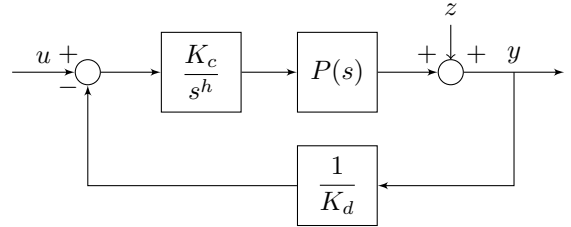
Si noti come tale funzione  $sY(s)$  non rispetchi il vincolo di analicità. Pertanto in questo specifico caso, non si può applicare il teorema del valor finale per il calcolo dell'uscita a regime permanente  $y(\infty)$ .

- (e) Per un ingresso nullo e disturbo a rampa di valore pari a  $z(t) = Z t \delta_{-1}(t)$ , con  $Z = 2$ , l'uscita del sistema è pari a

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_z(s) Z(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} \frac{Z}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P_2(s)}{1 + C(s) P_1(s) P_2(s) H(s)} \frac{2}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{(s+1)}{(s+2)}}{1 + \frac{K_c}{s^2} \frac{1}{(s+4)} \frac{(s+1)}{(s+2)}} \frac{2}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+1) s^2 (s+4)}{s^2 (s+4) (s+2) + K_c (s+1)} \frac{2}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+2) (s+4)}{s (s+4) (s+3) + K_c (s+2)} 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Sia dato un processo  $P(s)$  descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{3 \left( \frac{s}{3} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{12} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right) \left( \frac{s}{120} + 1 \right)}$$



- (a) Sintetizzare il sistema di controllo in figura con  $K_d = 5$  determinando
- Il valore di  $h$
  - Il valore di  $K_c$
- in modo tale che l'errore a regime per ingresso a rampa  $u(t) = 6t \delta_{-1}(t)$  sia uguale a 2.
- (b) Calcolare la funzione a ciclo aperto  $F(s)$  e tracciare i diagrammi di
- Bode
  - Nyquist
- (c) Determinare su tali diagrammi
- la pulsazione di attraversamento  $\omega_t$
  - margini di stabilità ( $m_\varphi$  e  $m_G$ ) (se possibile)
- (d) Discutere la stabilità del sistema a ciclo chiuso

### Soluzione esercizio 2

- (a) Il valore  $h$  (che caratterizza il tipo del sistema) viene determinato a partire dalle informazioni fornite sull'errore a regime. In particolare, per avere un errore finito a fronte di un ingresso a rampa, il sistema deve essere di tipo 1, da cui si deduce che nel caso in esame  $h = 1$ .

Il valore di  $K_c$  viene determinato a partire dalla formula dell'errore a regime, ovvero

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \frac{i!}{s^{i+1}} |U| = \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) \frac{i!}{s^i} |U| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2 s^{h-i}}{K_d s^h + K_G} i! |U|$$

dove ponendo  $h = 1$ ,  $i = 1$ ,  $K_d = 5$ ,  $K_G = 3 K_C$ , e  $|U| = 6$ , si ottiene:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{K_d s + K_G} i! |U| = \frac{K_d^2}{K_G} i! |U| = \frac{5^2}{3 K_c} 6 = \frac{50}{K_c}$$

da cui ricordando che  $e(\infty) = 2$  si ottiene:

$$K_c = 25;$$

Quindi si è scelto  $K_c = 25$  e  $h = 1$ , da cui deriva il controllore

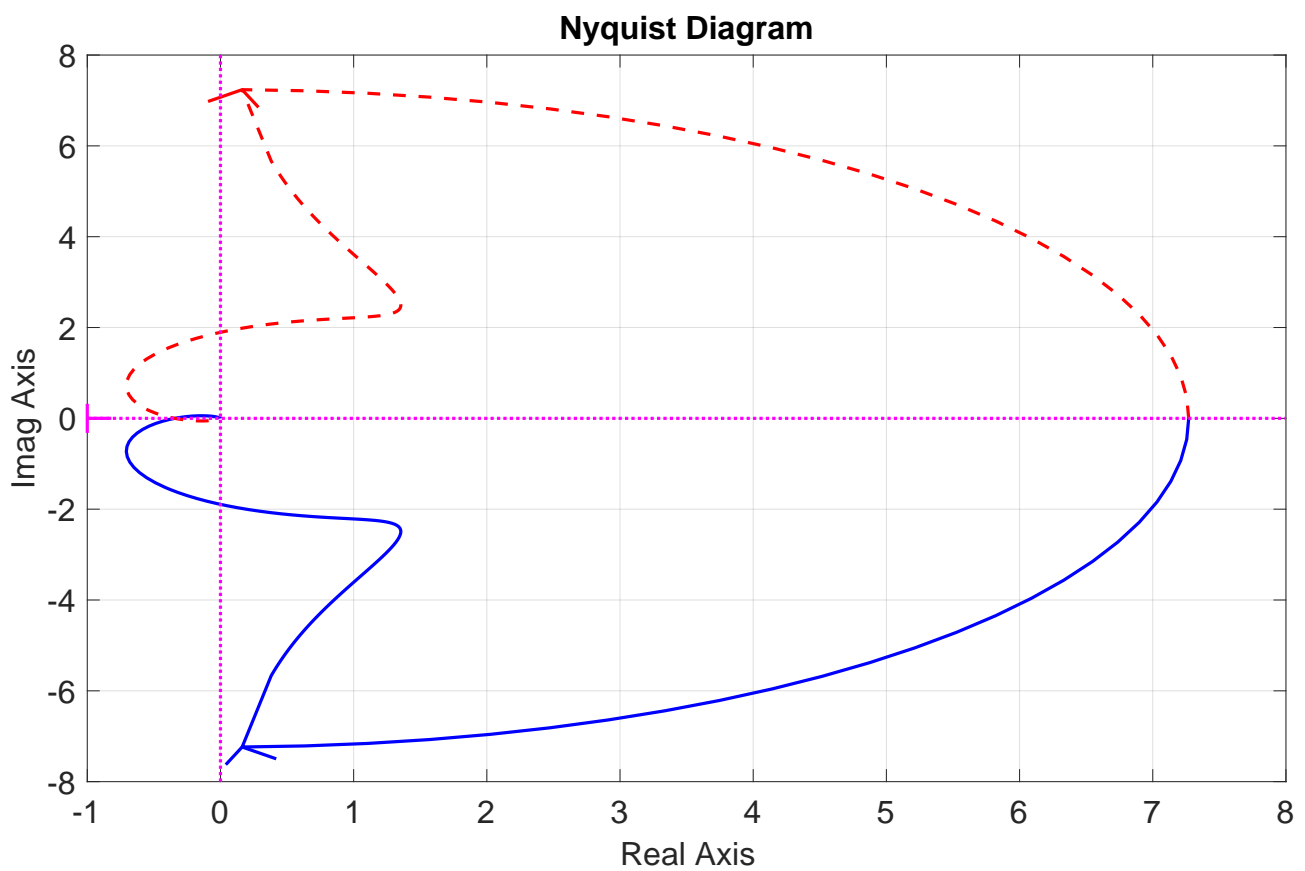
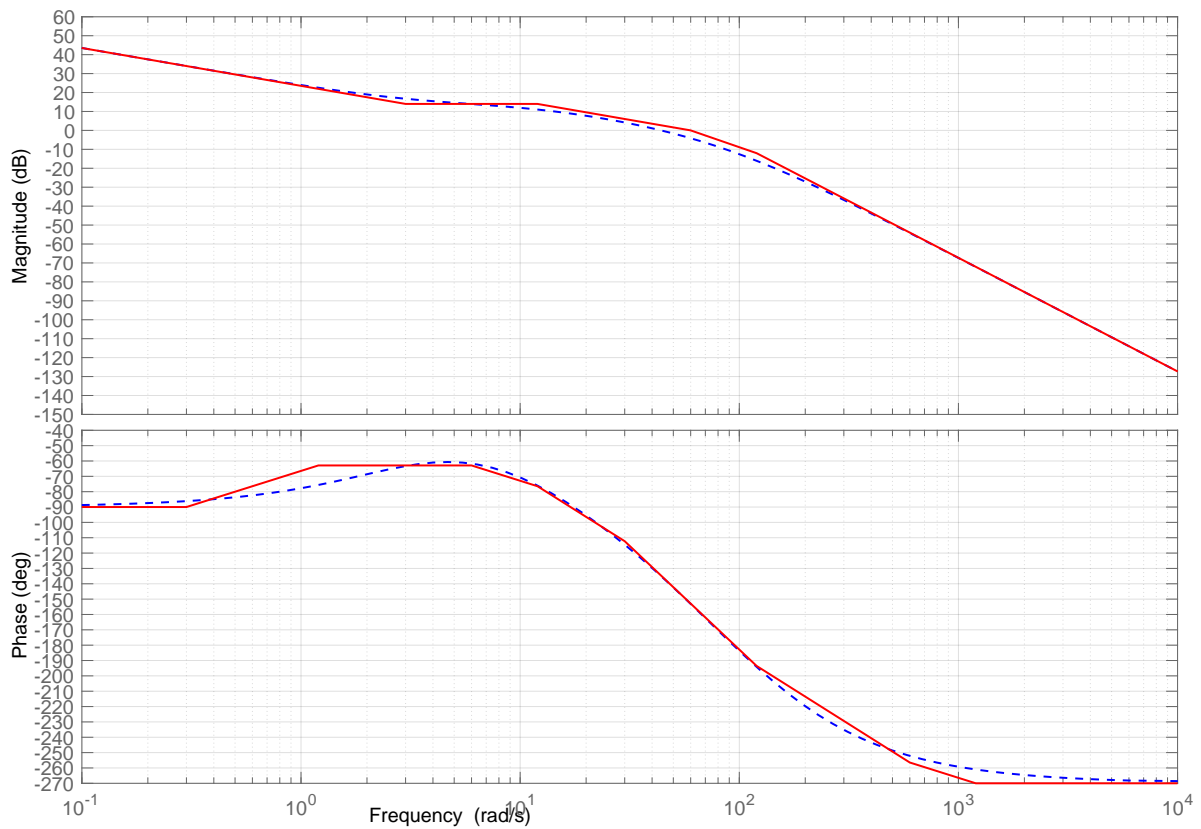
$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} = \frac{25}{s}.$$

Si noti che nello svolgere l'esercizio si è tenuto conto della seguente relazione  $\mathcal{L} \{ |U| t^i \} = |U| \frac{i!}{s^{i+1}}$ .

- (b) La funzione di trasferimento a ciclo aperto risulta essere:

$$\begin{aligned} F(s) = H(s)C(s)P(s) &= \frac{1}{5} \frac{25}{s} \frac{3 \left( \frac{s}{3} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{12} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right) \left( \frac{s}{120} + 1 \right)} \\ &= \frac{15 \left( \frac{s}{3} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{12} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right) \left( \frac{s}{120} + 1 \right)} \end{aligned}$$

a cui sono associati i seguenti diagrammi di Bode e Nyquist



(c) Relativamente alla pulsazione di attraversamento ed ai margini di stabilità si ha:

- pulsazione di attraversamento  $\omega_t \sim 60$  rad/sec.
- Margine di fase  $m_\varphi \sim 25^\circ$  e margine di guadagno è  $m_g \simeq 8$  dB

Si noti che il testo d'esame richiede che tali valori vengano determinati **direttamente** sui diagrammi. Ovvero che vengano “segnati” su entrambi i diagrammi.

- (d) La stabilità del sistema a ciclo chiuso la si può dedurre applicando il criterio di Nyquist. In particolare, essendo la funzione di trasferimento a ciclo aperto a fase minima, ovvero non essendoci poli a parte reale positiva nella funzione di trasferimento a ciclo aperto, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del sistema a ciclo chiuso è che il numero totale di rotazioni, considerate positive se effettuate in senso orario, che compie il vettore applicato nel punto critico  $-1 + j0$  e con estremo libero sulla curva, percorrendo una sola volta il diagramma completo di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(j\omega)$  a partire da  $\omega = -\infty$  fino a  $\omega = \infty$ , risulti essere **nullo**.
- 
-

3. Dato un processo  $P(s)$  descritto mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{s(s^2+3s+20)(s+3)}$$

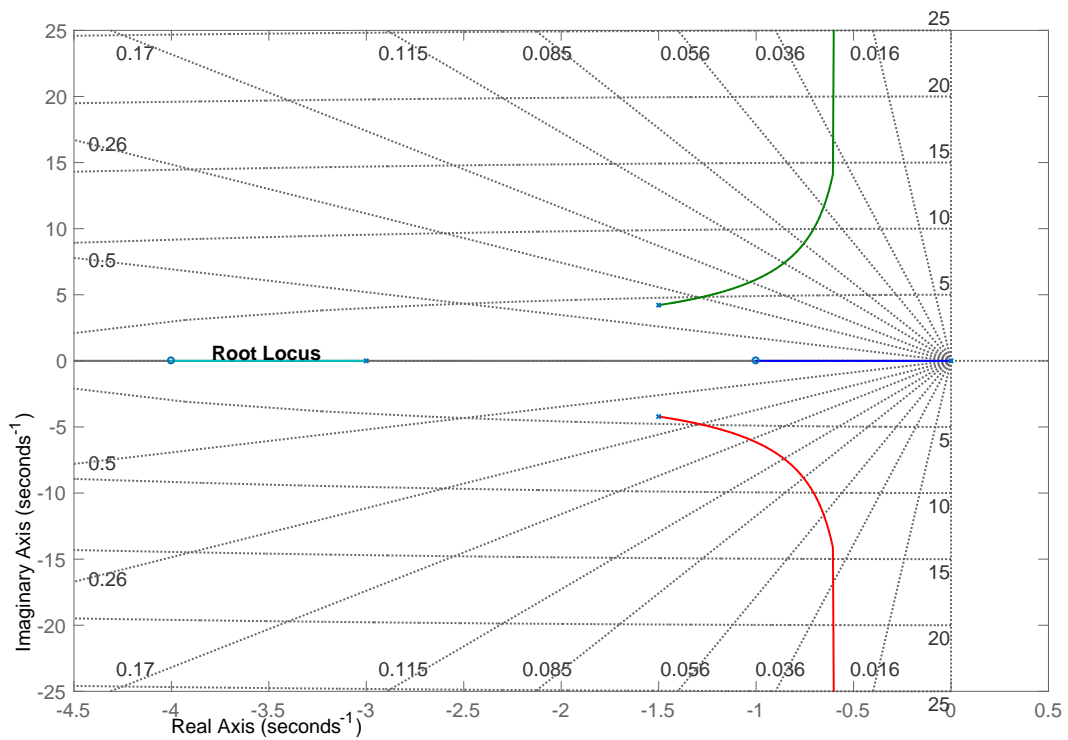
determinare

- (a) Il luogo delle radici completo
- (b) Stabilità al variare del guadagno  $K$ .

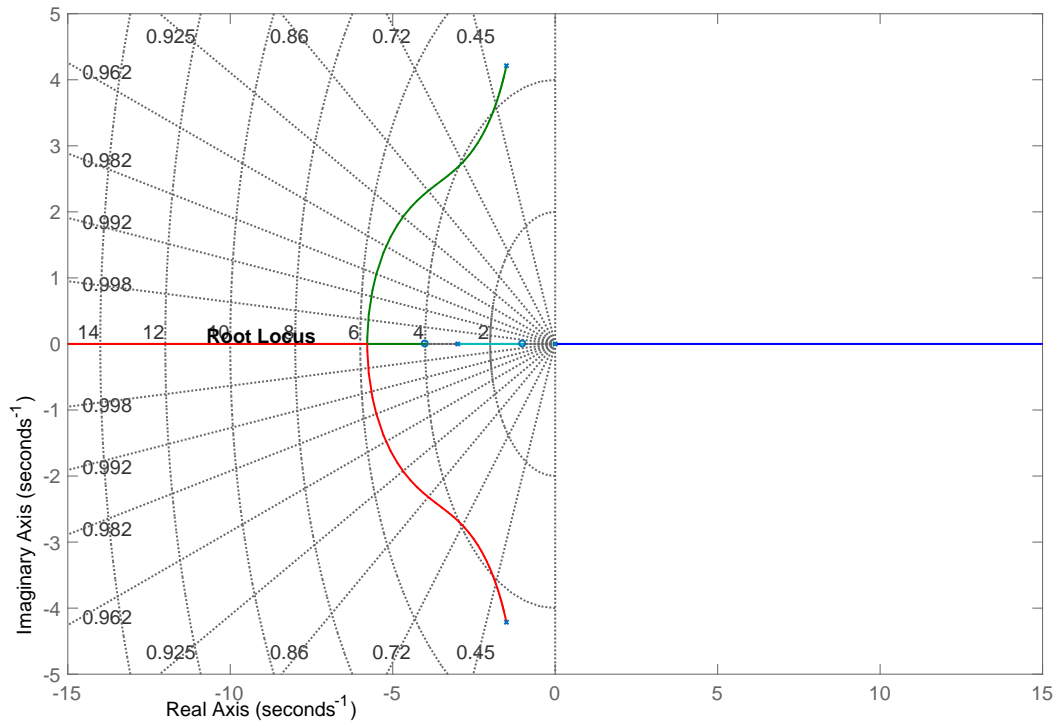
### Soluzione esercizio 3

(a) Relativamente al tracciamento del luogo delle radici si ha:

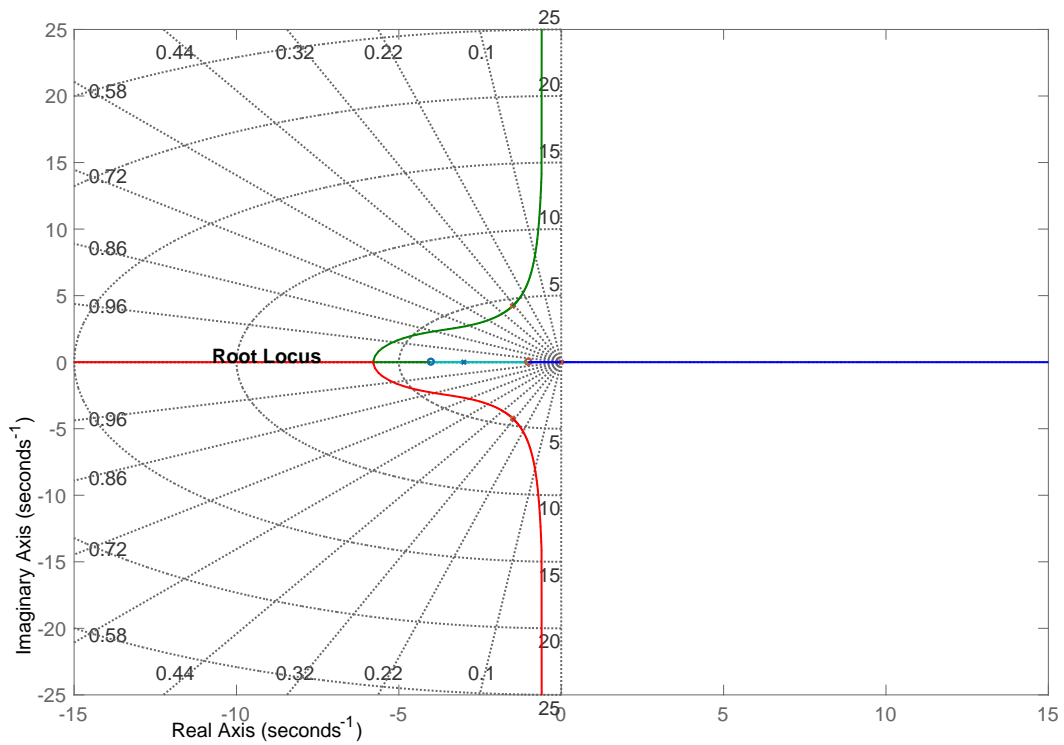
- Il luogo delle radici per  $K > 0$  risulta essere



- Il luogo delle radici per  $K < 0$  risulta essere

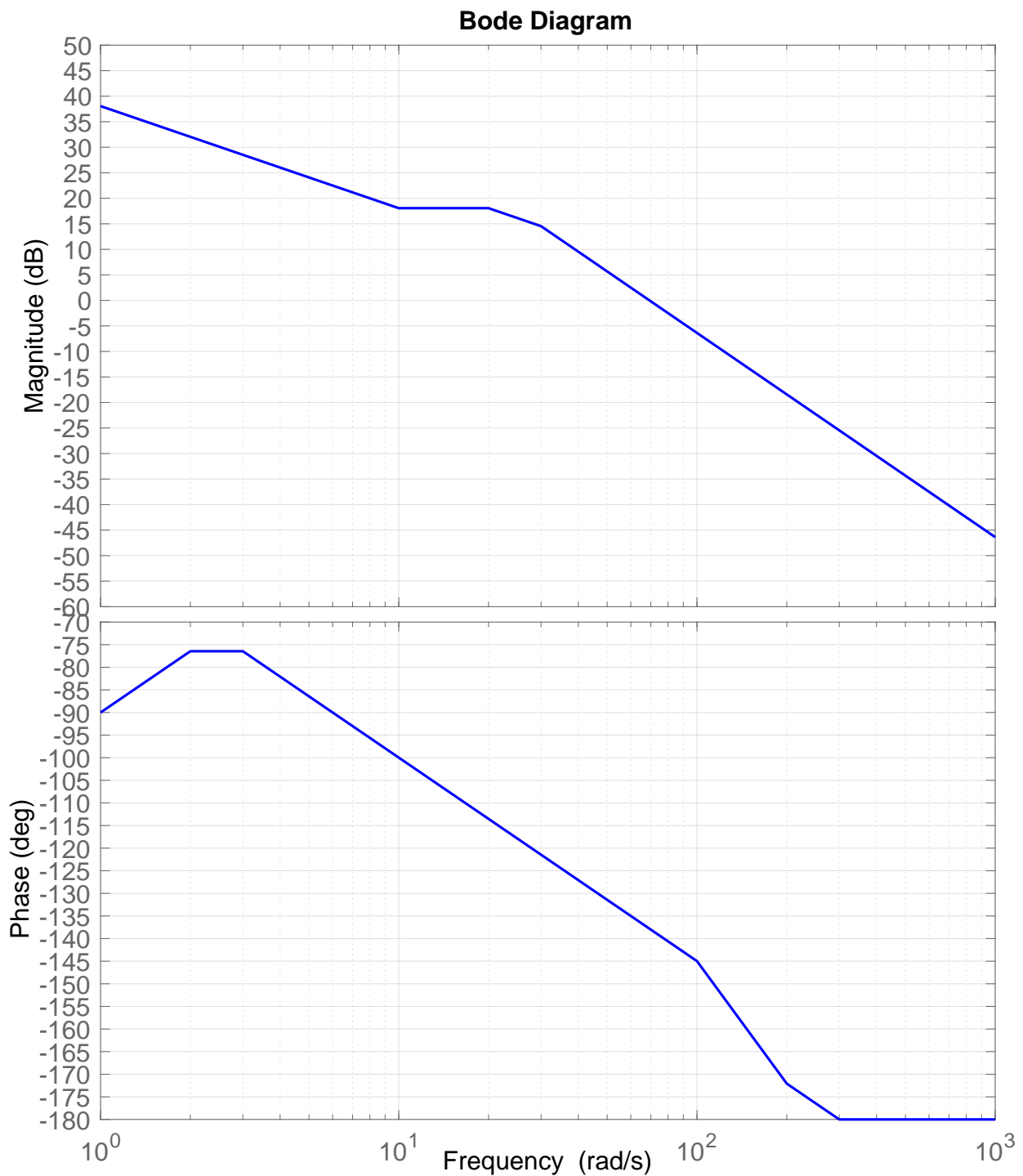


- Il luogo delle radici completo risulta essere



(b) Relativamente alla stabilità al variare del guadagno  $K$ , dal tracciamento del luogo delle radici si deduce che il sistema risulterà sempre stabile per ogni  $K > 0$ , mentre per  $K < 0$  il sistema risulterà sempre instabile. Si noti che lo stesso risultato lo si sarebbe potuto ottenere ricorrendo al criterio di Routh.

4. Dato il diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(s)$  sotto riportata (non ci sono poli a parte reale positiva) determinare la rete compensatrice  $R(s)$  tale da assicurare  $\omega_t \leq 300$  rad/sec,  $m_\phi \leq 45^\circ$ . Tracciare il diagramma di Nichols della funzione compensata  $F'(s) = F(s)R(s)$  e determinare su di esso il modulo alla risonanza  $M_r$  e la banda passante a -3 dB  $\omega_{-3}$ .



#### Soluzione esercizio 4

L'esercizio chiede che la  $F'(s) = R(s)F(s)$  soddisfi le seguenti specifiche:

- $\omega_t \leq 300$  rad/sec
- $m_\phi \leq 45^\circ$

Dal diagramma di Bode (asintotico) della funzione  $F(s)$  si può notare che per  $\bar{\omega} = 300$  rad/sec si ha:



- $|F(\bar{\omega})| \sim -25$  dB
- $\angle F(\bar{\omega}) \sim -180^\circ$

Se ne deduce che l'azione della rete correttiva dovrà essere tale da:

- **Incrementare** il modulo di  $\sim 25$  dB
  - **Incrementare** la fase di  $\sim 45^\circ$
- ⇒ Si necessita di una **Rete Anticipatrice**

La rete anticipatrice desiderata può essere espressa in forma parametrica come:

$$R(s) = \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau \frac{1}{m}} = \frac{1 + s \frac{u}{\omega^*}}{1 + s \frac{u}{\omega^*} \frac{1}{m}}$$

con la seguente scelta dei parametri:

- $m = 18$
- $u = 20$
- $\omega^* = 300$

ottenuta consultando la tabella che riporta il diagramma di Bode (asintotico) di varie reti anticipatrici ottenute al variare del parametro  $m$ . (Tabella disponibile al seguente link).

Dal diagramma di Bode (asintotico) della rete correttiva  $R(S)$  ottenuta con tale scelta dei parametri  $\{m, u, \omega^*\}$  si può notare che per  $\bar{\omega} = 300$  rad/sec si ha:

- $|R(\bar{\omega})| \sim 25$  dB
- $\angle R(\bar{\omega}) \sim 43^\circ$

Si consideri la funzione compensata  $F'(s) = R(s)F(s)$  e si noti che per  $\bar{\omega} = 300$  rad/sec si ha:

- $|F'(\bar{\omega})| \sim 0$  dB
- $\angle F'(\bar{\omega}) \sim -137^\circ$

che riflette le specifiche desiderate.

Relativamente al diagramma di Nichols si può notare che la banda passante  $\omega_{-3}$  è tale per cui:

- $|F'(\omega_{-3})| \sim -7.2$  dB
- $\angle F'(\omega_{-3}) \sim -158^\circ$

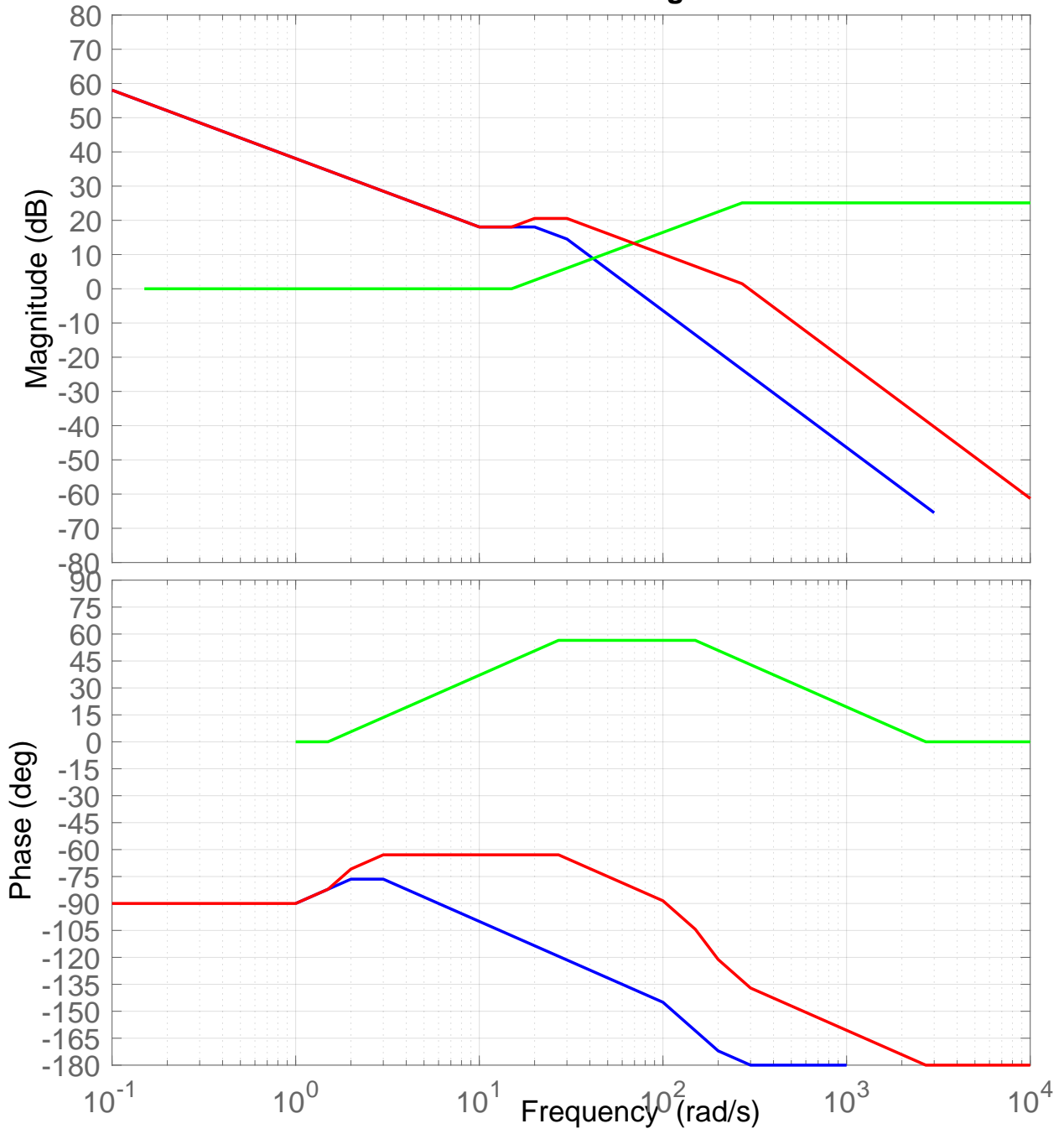
a questo punto verificando tali valori sul diagramma di Bode (asintotico) della funzione compensata  $F'(s)$  si ottiene:

- $\omega_{-3} \sim 105$  rad/sec

Sempre sul diagramma di Nichols si può notare che il valore della curva a modulo costante di valore più elevato che risulti tangente alla curva della  $F'(s)$  risulta essere la curva a modulo pari ad 5 dB, da cui si deduce che

- $M_r \sim 5$  dB

### Bode Diagram



### Nichols Chart

